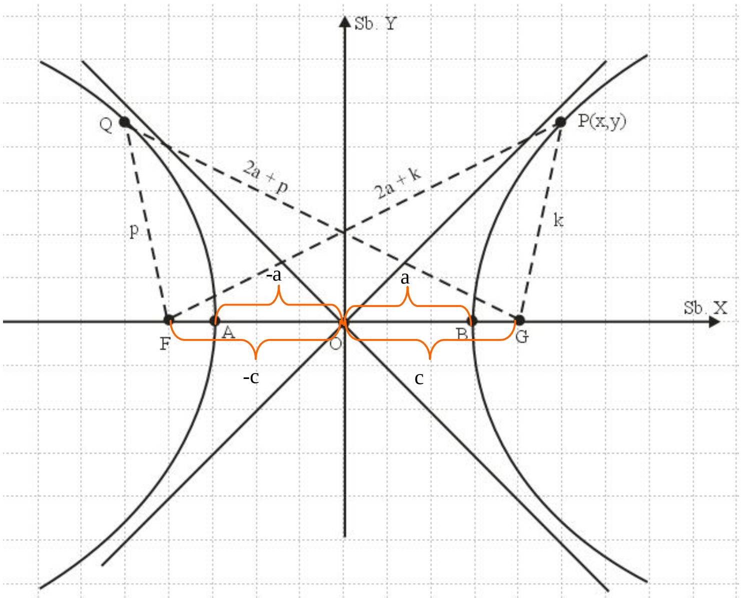
BAB VI
HIPERBOLA

6.1. Definisi Hiperbola

Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap harganya.

Catatan: dua titik tertentu itu disebut fokus hiperbola



Misalkan: F dan G adalah titik fokus hiperbolah yang jaraknya $2c$ sedangkan selisih jaraknya terhadap fokus adalah $2a$ dimana $2c > 2a > 0$

- Titik 0, yaitu titik tengah FG, disebut pusat hiperbola
- Titik $F(-c,0)$ dan $G(c,0)$ disebut titik fokus hiperbola
- Titik $A(-a,0)$ ban $B(a,0)$ disebut titik puncak hiperbola

$$\left.\begin{aligned} \overline{GA}-\overline{FA} &= \overline{FB}-\overline{GB} \\ &= \overline{AG}-\overline{GB} \\ &= \overline{AG}-\overline{GB} \\ &= \overline{AB} = 2a \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \overline{FP}-\overline{GP} &= 2a \\ \overline{GQ}-\overline{FG} &= 2a \end{aligned}$$

- Garis $\overline{AB}$ (sumbu x) dan sumbu y adalah sumbu simetri.

  Sumbu x, disebut sumbu nyata

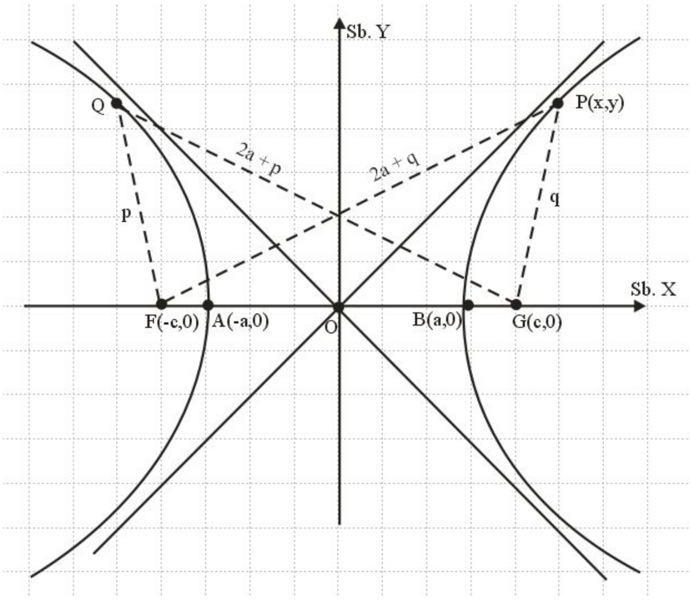
  Sumbu y, di sebut sumbu imajiner

- Harga $\frac{c}{a} =$ disebut eksentrisitet hiperbola

Cara Melukis Hiperbola

1. Buatlah lingkaran yang pusatnya di F dan jari-jarinya P di mana P > c – a
2. Buatlah lingkaran yang pusatnya di G dan jari-jarinya di 2a + p
3. Lingkaran (1) dan (2) berpotongan di Q, titik Q adalah salah satu titik pada hiperbola.
4. Buatlah lingkaran yang pusatnya G dan jari-jari K, dimana K > c – a
5. Buatlah lingkaran yang berpusat di F dan jari-jarinya 2a + k
6. Lingkaran (4) dan (5) berpotongan di P, titik P(x,y) adalah salah satu titik pada hiperbola.
7. Dengan mengambil beberapa harga P dan K akan diperoleh beberapa titik lain yang terletak pada hiperbola dengan menghubungkan titik-titik lewat sebuah kurva yang mulus, terdapat hiperbola yang diminta.

6.2. Persamaan Hiperbola



Jika $F(-c,0)$, $G(c,0)$, dan $P(x, y)$ terletak pada hiperbola maka:

$$\overline{PF} = V(x+c)^2 + y^2$$

$$\overline{PG} = V(x-c)^2 + y^2$$

Jadi $\overline{PF} - \overline{PG} = 2a$

$$2a = \overline{PF} - \overline{PG}$$

$$2a = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c) + y^2$$

$$x^2 + 2c + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\underline{cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}$$

$$c^2x^2 - 2ca^2x + a^2 = a^2\left((x-c)^2 + y^2\right)$$

$$= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

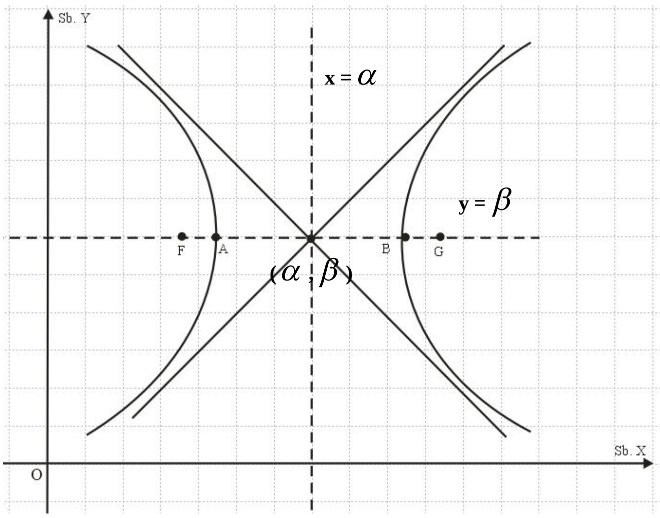
$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = -a^2 + a^2c^2$$

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$ ingat $b^2 = c^2 - a^2$ atau $c^2 = a^2 + b^2$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ persamaan hiperbola dengan pusat 0(0,0)

6.3. Persamaan Hiperbola yang berpusat di (α, β)



Jika pusat hiperbola tetap sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat, maka dengan mudah dapat dibuktikan bahwa persamaan hiperbola tersebut adalah:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

6.4. Persamaan Parameter Hiperbola

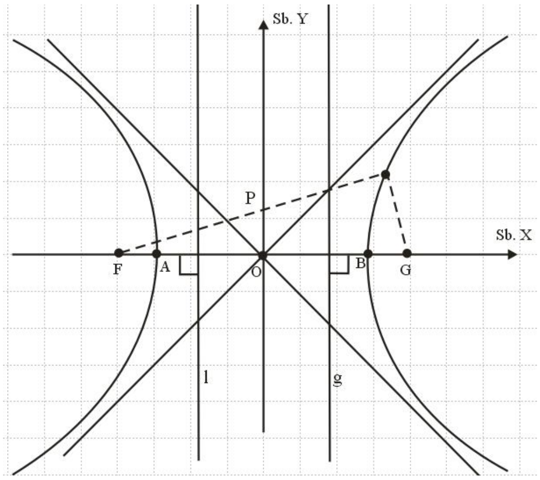
persamaan parameter parabola tersebut adalah :

$\begin{cases} x = a.\sec\varphi \\ y = b.tg\varphi \end{cases}$, ingat $\sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1$

Asymtot hiperbola

Misalkan persamaan garis asymtot itu $y = px$ (p = parameter) terhadap hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

Perpotongannya :



$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$(b^2 - a^2p^2)x^2 = a^2b^2$$

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2p^2} \\ y^2 &= \frac{a^2b^2p^2}{b^2 - a^2p^2} \end{aligned}\right\} \text{Merupakan koordinat } x \text{ dan koordinat } y \text{ dari titik potongnya.}$$

Jika $b^2 - a^2p^2 < 0, p^2 > \frac{b^2}{a^2}$ ………………………………………. (1)

Tentulah titik potong imajiner, garis tidak memotong hiperbola.

jika $b^2 - a^2p^2 > 0, p^2 < \frac{b^2}{a^2}$ ……………………………………… (2)

tentulah kedua titik potongnya nyata dan berlainan. Dapat disimpulkan sebagai berikut:

$b^2 - a^2p^2 = 0, p^2 = \frac{b^2}{a^2}$ ……………………………..……………….. (3)

$$p^2 = \pm\frac{b^2}{a^2}$$

Maka garis-garis itu, $y = px$

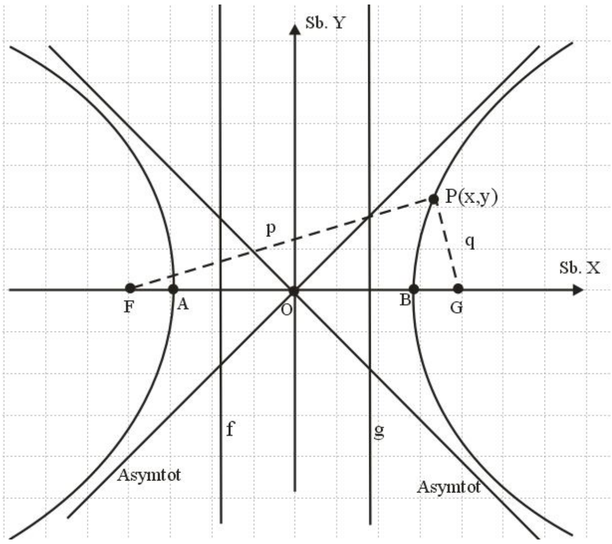
$y = \pm\frac{b^2}{a^2}$, merupakan garis-garis singgung koordinat. Sehingga : $y = \pm\frac{b^2}{a^2}$, disebut asymtot-asymtot hiperbola atau garis singgung pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Catatan:

Persamaan hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, bila a = b, maka : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ atau $x^2-y^2=a^2$, sisebut hiperbola orth0gonal, yaitu kedua asymtotnya berpotongan tegak lurus.

Direktriks dan Eksentrisitet

Hiperbola adalah tempat kedudukan titik-titik yang perbandingan jarak ke suatu titik dan suatu garis yang tertentu tetap harganya, $e=\frac{c}{a}>1$



Catatan :

- Titik tertentu itu disebut focus
- Garis tertentu itu disebut direktiks
- Harga tetap itu $e=\frac{c}{a}>1$ disebut eksentrisitas

$$FP^2 = p^2 = (x + c)^2 + y^2$$
$$\underline{GP^2 = q^2 = (x + c)^2 + y^2 \quad -}$$
$$p^2 - q^2 = 4cx$$
$$(p + q)\,(p - q) = 4cx$$
$$(p - q)\,2a = 4cx$$
$$(p - q) = \frac{2cx}{a}$$

$$(p - q) = \frac{2cx}{a}$$
$$\underline{(p + q) = 2a \qquad +}$$
$$2p = \frac{2cx}{a} + 2a$$

$$p = \frac{cx}{a} + a$$

$$p = \frac{c}{a}(x + \frac{a^2}{c}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(p + q) = \frac{2cx}{a}$$

$$\underline{(p - q) = 2a \qquad -}$$

$$2q = \frac{2cx}{a} - 2a$$

$$q = \frac{cx}{a} - a$$

$$q = \frac{c}{a}(x - \frac{a^2}{c}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

(1) dan (2), $p = (x + \frac{a^2}{c}) = q = (x - \frac{a^2}{c}) = \frac{c}{a} > 1$

jadi garis *f* dan garis *g* adalah direktriks dengan persamaan berurut-turut :

$$f \equiv x = -\frac{a^2}{c}$$

$$g \equiv x = \frac{a^2}{c}$$

Garis dan Hiperbola

Seperti halnya pada lingkaran, parabola dan ellips. Maka hiperbola dan garis berkemungkinan :

- Tidak saling memotong, syarat $D < 0$
- Memotong di dua titik, syarat $D > 0$
- Menyinggung dengan syarat $D = 0$

6.5. Persamaan Garis Singgung Hiperbola

A. Persamaan Garis Singgung pada Hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Misalkan persamaan garis singgung $y = mx + n$……..(1)

Persamaan hiperbola $bx^2 - ay^2 = a^2b^2$………………..(2)

(1) dan (2)

$$b^2x^2 - a^2(mx + n)^2 = a^2b^2$$
$$b^2x^2 - a^2m^2x^2 - 2a^2\,mnx - a^2n^2 = a^2b^2$$
$$(b^2 - a^2m^2)\,x^2 - 2a^2\,mnx - (a^2n^2 + a^2b^2) = 0$$

Syarat menyinggung : $D = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-\,2a^2\,mn)2 - 4\,(b^2 - a^2m^2)\,.-(a^2n^2 + a^2b^2) = 0$

$4a^4n^2m^2 + 4(b^2 - a^2m^2)\,.-(a^2n^2 + a^2b^2) = 0$

$4a^4n^2m^2 + 4a^2b^2n^2 + 4a^2b^4 - 4a^4m^2n^2 - 4a^2b^2m^2 = 0$

$\underline{4a^2b^2n^2 + 4a^2b^4 - 4a^2b^2m^2 = 0 \quad :}\ 4a^2b^2$

$n^2 + b^2 - a^2m^2 = 0$

$n^2 = a^2m^2 - b^2$

$n = \pm\sqrt{(a^2m^2 - b^2)}$…………(3)

Persamaan (3) ke (1)

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$, ini adalah persamaan garis singgung dengan koofisien arah m (m parameter) pada hiperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

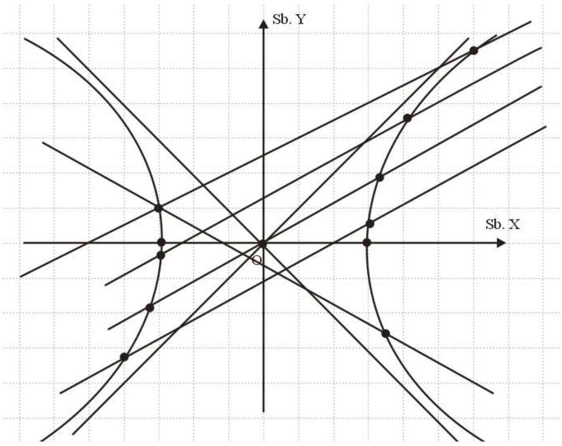
Analog : untuk persamaan garis singgung pada hiperbola $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$, dengan koofisien arah m adalah : $(y-\beta) = m(x-\alpha) \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

B. Persamaan Garis Singgung di (x_1, y_1) pada Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Dengan jalan yang sama pada ellips, maka persamaan garis singgung hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ di (x_1, y_1) adalah $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

6.6. Dua Garis Tengah Sekawan

Dengan merubah b^2 oleh $-b^2$ diperoleh sebagai berikut :



1. Setiap garis yang sejajar dengan garis $k \equiv y = mx$ adalah $y = mx + n$
2. Garis k dan l dinamakan dua garis tengah sekawan
3. Hubungan koofisien arah garis k dan l, maka $m_k \cdot m_l = \frac{b^2}{a^2}$
4. Jika titik ujung garis tengah sekawan yang satu (x_1, y_1) dan titik ujung garis tengah sekawan yang lain (x_2, y_2), maka antara koordinat-koordinat itu terdapat hubungan :

$$\frac{x_2}{a} = \pm\frac{y_1}{b}, \rightarrow \quad x_2 = \frac{a}{b}y_1$$

$$x_2 = -\frac{a}{b}y_1$$

$$y_1 = \frac{b}{a}x_2$$

$$y_2 = -\frac{b}{a}x_2$$

$$\frac{y_2}{b} = \pm\frac{x_1}{a}, \rightarrow x_1 = \frac{a}{b}y_2$$

$$x_1 = -\frac{a}{b}y_2$$

$$y_2 = \frac{b}{a}x_1$$

$$y_2 = -\frac{b}{a}x_1$$

P $(\frac{a}{b}y_2, \frac{b}{a}x_2)$

Q $(-\frac{a}{b}y_2, -\frac{b}{a}x_2)$

R $(-\frac{a}{b}y_1, -\frac{b}{a}x_1)$

S $(\frac{a}{b}y_1, -\frac{b}{a}x_1)$

Persamaan garis tengah sekawan

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$yy_1 = -\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}xx_1$$

$$y_1 = -\frac{b^2}{a^2m}x_1$$