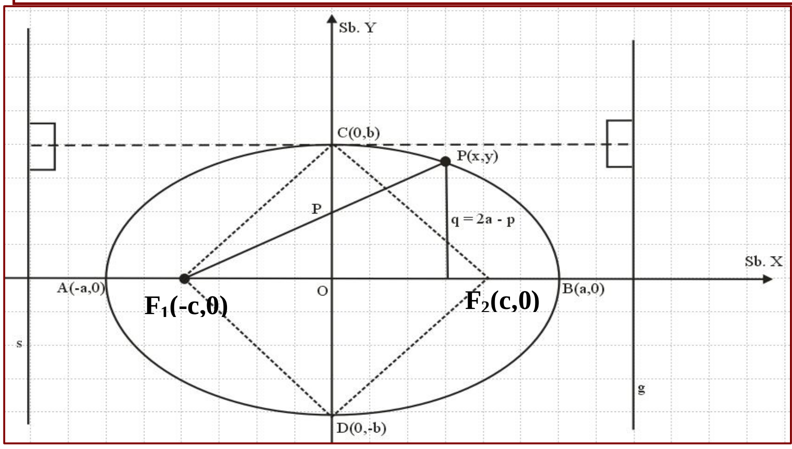
5.1. DEFINISI

Ellips adalah tempat kedudukan titik yang jumlah jaraknya terhadap dua titik tertentu tetap harganya.



***F* (titiknya tetap)** merupakan berkas garis yang disebut **direkstriks** ,

$\frac{c}{a}$ disebut **eksentrisitas (*e*).**

$e = \frac{c}{a} < 1$

$AB = 2a$

$F_1 + F_2P = 2c$

AB = sumbu panjang (***mayor***)

CD = sumbu panjang (***minor***)

5.2. PERSAMAAN ELLIPS

Misalkan : $\left.\begin{array}{rcl} F_1F_2 & = & 2c \\ AB & = & 2a \\ CD & = & 2b \end{array}\right\}$

yang berarti $F_1(-c, 0)$ dan $F_2(c, 0)$, $b^2 = a^2 - c^2$ atau $a^2 = b^2 + c^2$ dan *p* (*x*,*y*) terletak ada elips

- -

$F_1P + F_2P = 2a$

$F_1P = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2}$

$= \sqrt{(x+c))^2 + y^2}$

- -

$$F_1P + F_2P = 2a$$

$$\sqrt{(x+c))^2 + y^2} + \sqrt{(x-c))^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c))^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + Y^2}$$

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c))^2 + y^2} + (x - c^2 + y^2)$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c))^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx = 4a^2\ \sqrt{(x-c))^2 + y^2}$$

$$cx = a^2 - a\sqrt{(x-c))^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left((x-0)^2 + y^2\right)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 + a^4 - a^2c^2 = 0$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

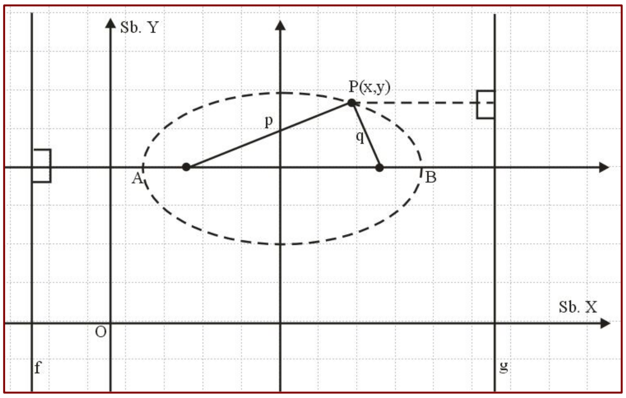
$$\left(a^2 - x^2\right)x^2 + a^2y^2 = a^2\left(a^2 - c^2\right)$$

$$\underline{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2} \quad : a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \rightarrow$$ **Persamaan umum ellips dengan pusat (0, 0)**

5.3. PERSAMAAN UMUM ELLIPS DENGAN PUSAT (α, β)

2*a* terletak dan sumbu pendek (sumbu minor) sumbu *x* dan sumbu *y* dengan analog jika pusat ellips adalah (α, β) simetrinya tetap sejajar dengan sumbu *x* dan sumbu *y* pusatnya adalah (α, β) maka persamaan ellips tersebut adalah $\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1}$



$A(-a + (\alpha, \beta))$

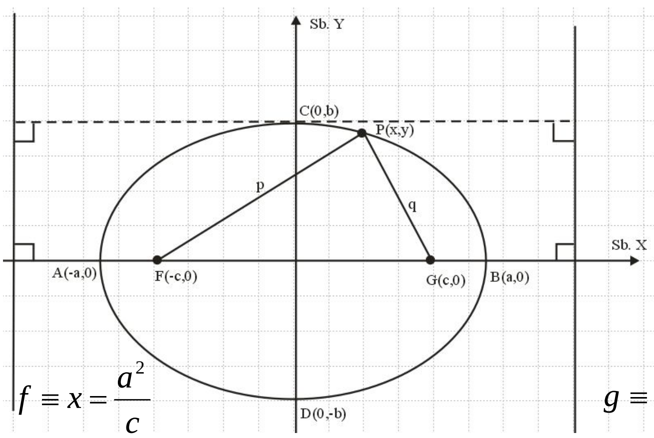
$B(a + \alpha, \beta)$

$C(x, b + \beta)$

$F_1(b(a.\beta))$

$F_2(c(a.\beta)$

Direktris dan eksentrisitas



$f \equiv x = \frac{a^2}{c}$ $\qquad$ $g \equiv x = \frac{a^2}{c}$

$$p^2 - q^2 = (x + c)^2 + y^2 - (x - c)^2 + y^2$$

$$= x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - (x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$= x^2 - x^2 + 2cx + 2cx + c^2 - c^2 + y^2 - y^2$$

$$p^2 - q^2 = 4cx$$

$$(p + q)(p - q) = 4cx$$

Ingat : $p + q = 2a$

$$2a (p - q) = 4cx$$

$$p - q = \frac{4cx}{2a}$$

$$p - q = \frac{2cx}{a}$$

$$\underline{p + q = 2a}$$

$$2p = 2a + \frac{2cx}{a}$$

$$p = \frac{cx}{a} + a$$

$$p = \frac{c}{a}(x - \frac{a^2}{c})$$

$$q = \frac{c}{a}(x - \frac{a^2}{c})$$

$$q = \frac{c}{a}\left(x - \frac{a^2}{c}\right)$$

$$h \equiv x = -\frac{a^2}{c}$$

$$g \equiv x = \frac{a^2}{c}$$

persamaan garis $g_1 \equiv x = -\dfrac{a^2}{c}$

$$g_2 \equiv x = \frac{a^2}{c}$$

Artinya :

$$p:\left(\frac{a^2}{c}+x\right)=p \text{ jarak dari titik } P \text{ ke garis } f \equiv x=-\frac{a^2}{c}$$

$$q:\left(\frac{a^2}{c}-x\right)=p \text{ jarak dari titik } P \textit{ kegaris } g \;\; g \equiv x=+\frac{a^2}{c}$$

Contoh 17 :

Jika eksentrisitas (e) suatu ellips $\frac{12}{13}=(c-a)$ jarak antara dua fokus adalah 36. tentukan persamaan ellips.

Penyelesaian :

e = $\frac{12}{13}$

2c = 36

c = 18

e = $\frac{12}{13} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{12}{13}$

$\frac{18}{a}=\frac{12}{13}$

12a = 243

$a=\frac{243}{12}=19{,}5$

$b^2=a^2-c^2$

$=\left(\frac{243}{12}\right)^2-(18)^2$

= $380{,}25-324$

= 56,25

b = 7,5

persamaan ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{19{,}5^2}+\frac{y^2}{7{,}5^2}$

5.4. Hubungan Garis dengan Ellips..

Berarti halnya pada ligkaran dan parabola, kedududkan garis terhadap ellips maka ada tiga kemungkinan :

1. Tidak memotong : $D < 0$
2. Memotong : $D > 0$
3. Menyinggung : $D = 0$

5.5. Persamaan Garis Singgung

Persamaan garis singgung pada ellips (0,0)

Misalkan : persamaan garis $\equiv y = mx + n$ .... (i)

Persamaan ellips : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .... (ii)

Persamaan (ii) dirubah menjadi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Persamaan (i) dimasukan ke dalam persamaan (ii)

$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2(mx+n)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2 = a^2b^2)$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$(b^2x^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$D = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$\left(2a^2mn\right)^2 - 4\left(b^2 + a^2m^2\right)\left(a^2n^2 - a^2b^2\right) = 0$$

$$4a^4m^2n^2 - 4a^4m^2n^2 + 4a^4b^2m^2 - 4a^4b^2n^2 + 4a^2b^4 = 0$$

$$\underline{4a^4b^2m^2 - 4a^2b^2n^2 + 4a^2b^2 = 0} : 4a^2b^2$$

$$a^2m^2 - n^2 + b^2 = 0$$

$$n^2 = a^2m^2 + b^2$$

$$n^2 = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

$$y = mx + n$$

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \Rightarrow$ Persamaan garis singung ellips dengan gradien m

Analog : untuk ellips $\Rightarrow \dfrac{(x-\partial)^2}{a^2} + \dfrac{(y^2-\beta)^2}{b^2} = 1$

Persamaan garis singgung dengan koefisien m yang berpusat (α, β).

$$\Rightarrow \boxed{(y-\beta) = m(x-\alpha) \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}}$$

Contoh 18 :

Tentukan persamaan garis singgung pada ellips $x^2 + 2y^2 = 8$ yang tegak lurus garis $x + 2y = 9$

Penyelsaian :

$$\underline{x^2 + 2y^2 = 8} \quad : 8$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Berarti : $a^2 = 8$

$$b^2 = 4$$

$$x + 2y = 9$$

$$m_1 = \frac{a}{b}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

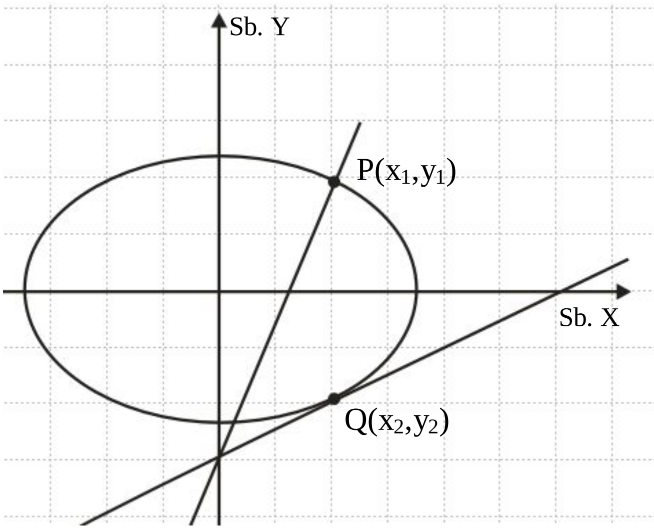
$$m_S . m_1 = -1$$
$$m_S = 2$$

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

$$= 2x \pm \sqrt{8.4 + 4}$$

$$= 2x \pm 6$$

Garis Singgung di Titik P(x_1,y_1) Pada Ellips



$$P(x_1, y_1) \text{ pada } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$(x_2, y_2) \text{ pada } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_2^{\ 2}}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \frac{(x_2^{\ 2} - x_1^2)}{a^2} + \frac{(y_2^2 - y_1^2)}{b^2} = 0$$

$$\frac{(y_2^{\ 2} - y_1^2)}{a^2} = -\frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{b^2}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2}{b^2}\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_2}$$

Persamaan Garis Lurus di Titik P(x_1,y_1)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Persamaan Garis Lurus di Titik Q(x_2,y_2)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

$\therefore \Rightarrow$ Q mendekati P (berimpit)

$$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2}\frac{(x_2 + x_1)}{y_2 + y_1}(x - x_2)$$

$$a^2(y_2 + y_1)(y - y_1) = -b_2(x - x_2)2x_1$$
$$a^2(2y_1)(y - y_1) = -b_2(x - x_1)(2x_1)$$
$$a^2(2y_1y - 2y_1{}^2) = -b^2(2x_1x - 2x_1^2)$$
$$-a^2(2y_1y - 2y_1{}^2) = b^2(2x_1x - 2x_1^2)$$
$$-2a^2y_1y + 2a^2y_1{}^2 = 2b^2x_1x - 2b^2x_1{}^2$$
$$\underline{-2a^2y_1y - 2b^2x_1x = -2b^2x_1{}^2 - 2ay_1{}^2} : -1$$

$$2a^2y_1y + 2b^2x_1x = 2a^2y_1{}^2 + 2b^2x_1{}^2$$
$$b^2x_1x + a^2y_1y = b^2x_1{}^2 + b^2y_1{}^2$$
$$\underline{b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2} : a^2b^2$$

$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ persamaan garis singgung di titik R(x_1, y_1) pada ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Contoh 19 :

Tentukan persamaan garis singgung pada ellips $2x^2 + 4y^2 = 16$ di $(6,1)$

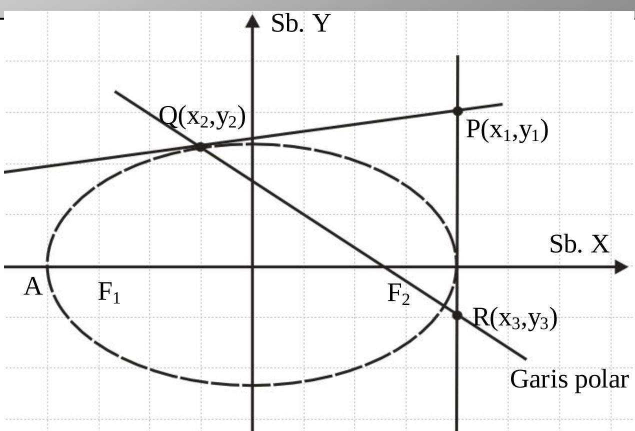
Penyelesaian :

$$\underline{2x^2 + 4y^2 = 16}_{:16}$$

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad\qquad \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 8 \qquad\qquad \frac{6x}{8} + \frac{y}{4} = 1$$
$$b^2 = 4$$

5.6. Titik dan Garis Polar



Jika sebuah titik $P(x_1, y_1)$ diluar suatu ellips ditarik dua buah garis singgung (*PQ* dan *PR*) maka garis penghubung antara kedua titik singungnya (garis *PQ*) disebut garis polar.

Titik *P* disebut titik polar.

Persamaan garis singgung di titik $Q \Rightarrow \dfrac{x_2 x}{a^2} + \dfrac{y_2 y}{b^2} = 1$ .... (1)

Persamaan garis singgung di titik $R \Rightarrow \dfrac{x_3 x}{a^2} + \dfrac{y_3 y}{b^2} = 1$ .... (2)

Karena titik P terletak pada persamaan (1), maka:

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} = 1 \text{ .... (3)}$$

Karena titik P$\left(x_1, y_1\right)$terletak pada persamaan (2) maka :

$$\frac{x_1 x_3}{a^2} + \frac{y_1 y_3}{b^2} = 1 \text{ .... (4)}$$

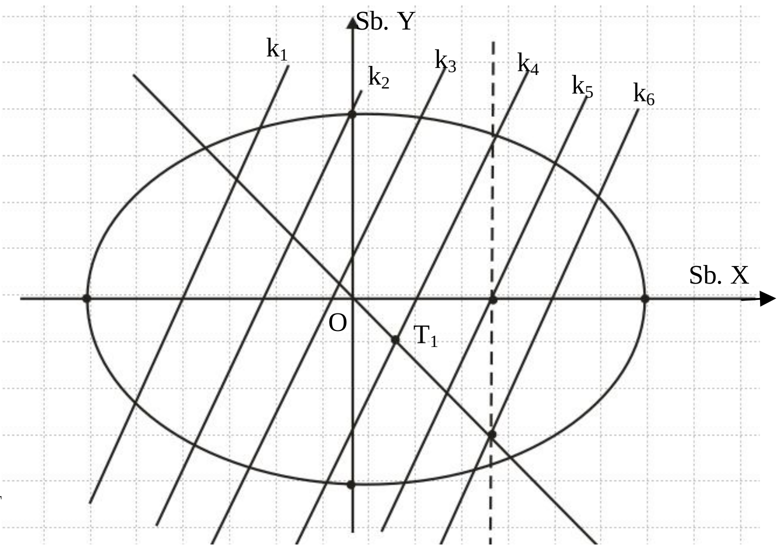
Berhubung persamaan (2) dan persamaan (4) titik Q dan R terletak

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

Berarti persamaan (5) ditentukan oleh titik P$\left(x_1, y_1\right)$ terhadap ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ adalah : } \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

5.7. Garis Tengah Sekawan pada Ellips



Deffinisi : dua garis tengah sekawan pada ellips adalah titik-titik tengah dari tli busur yang sejajar.

Misalkan : garis $k \equiv mx + n$ .... (1)

Persamaan ellips $\equiv \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ .... (2)

Persamaan (1) subsitusikan ke persamaan (2) :

$$b^2x^2 + a^2(mx+n)^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2\left(m^2x^2 + 2mnx + n^2\right) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2m^2nx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\left(b^2 + a^2m^2\right)x^2 2m^2nx + a^2n^2 - a^2b^2 = 0$$

$$T_1 = \left[\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right]$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}$$

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2) = -\frac{2a^2mn}{2\left(b^2+a^2m^2\right)}$$

$x_T = -\dfrac{a^2mn}{b^2+a^2m^2}$ .... (3)

$$y_T = mx_T + n$$

$y_T = -\dfrac{a^2m^2n}{b^2+a^2m^2} + n$ .... (4)

Melihat kembali $x_T = -\dfrac{a^2mn}{b^2+a^2m^2}$

maka : $-a^2mn = x_T\left(b^2+a^2m^2\right)$

$n = \dfrac{x_T\left(b^2+a^2m^2\right)}{-a^2mn}$ .... (5)

Subsitusikan persamaan (5) ke persamaan (4)

$$y_T = m\frac{-a^2mn}{b^2+a^2m^2} + \frac{-x_T\left(b^2+a^2m^2\right)}{a^2m}$$

$$y_T = mx_T + \frac{-b^2}{a^2m}x_T - \frac{a^2m^2}{a^2m}x_T$$

$$= mx_T - \frac{b^2}{a^2m}x_T - mx_T$$

$$= -\frac{b^2}{a^2m}x_T$$

Secara umum, karena T berjalan :$\Rightarrow y = -\frac{b^2}{a^2m}x$

Catatan :

1. Hubungan antara koefisien-koefisien arah kedua garis sekawan tadi dapat ditentukan sebagai berikut :

   - Jika gradien garis 1 = m' ; dan garien garis k

   $$\Rightarrow m_1 \times m_k = m \times m$$

   $$= \frac{-b^2}{a^2m}m$$

   $$= \frac{-b^2}{a^2}$$

2. Garis singgung titik potong garis k dengan ellips ditentukanlah sejajr dengan garis 1 dan sebaliknya.

3. Keempat garis singgung pada tiap-tiap titik potong garis tengah sekawan dengan ellips membentuk suatu jajaran genjang sehingga disebut jajaran genjang padadua garis tengah sekawan .

   Misalkan : kedua garis sekawan PR , QS dan P$\left(x_1, y_1\right)$, terletak pada ellips

   maka : $b^2x_1^{\;2} + a^2y_1^{\;2} = a^2b^2$ .... (5)

   koefisien arah QS $= \frac{y_1}{x_1}$ sedangkan

   koefisien arah PR $= \frac{y_1}{x_1}$ sedangkan

   koefisien arah QS $= \frac{-b^2}{a^2}x_1y_1$

$\therefore$ persamaan garis PQ menjadi $y = \dfrac{-b^2 x_1}{a^2 y_1} x$

Persamaan garis itu menghasilkan : $\left(a^2 y_1^{\;2} + b^2 x_1^{\;2}\right)x^2 = a^4 y_1^{\;2}$

Dimana melalui titik P : $a^2 b^2 x^2 = a^4 y_1^{\;2}$ atau $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{y_1^{\;2}}{b^2}$

Dari persamaan diatas terakhir menghasilkan koordinat titik Q dan S berturut-turut dngan tanda $(-)$ dan $(+)$

Diperoleh x di titik S $\equiv \dfrac{y_S}{a} = \dfrac{y_1}{b}$

Sehingga didapat $\dfrac{y_S}{a} = \dfrac{x_1}{b}$

Titiknya (x_1, y_1)

Untuk $\dfrac{y_Q}{a} = \dfrac{y_1}{b}$

$$\frac{y_Q}{a} = -\frac{x_1}{b}$$

Sehingga didapat titik Q dan S

Contoh 20 :

1. Tentukan persaman, tali busur suatu ellips $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ sehingga titik (2,3) merupakan titik tengah tali busur itu.

   Penyelesaian :

   Diketahui : $a^2 = 32$

   $b^2 = 24$

   T$(2,3) \Rightarrow x_T = 2, y_T = 3$

   Misalkan tali busur y = mx + n

   $$y = \frac{-b^2}{a^2 m} x$$

   $$3 = \frac{-24}{32m}.2$$

$$96.m = -48$$

$$m = -\frac{1}{2}$$

$$n = x_T \frac{-b^2 + a^2 m^2}{a^2 m}$$

$$= 2.\frac{-24 + 32 + \frac{1}{4}}{-16}$$

$$= \frac{-16}{-8}$$

$$= 2$$

$$n = 2$$

$\therefore$ Persamaan tali busur ellips tersebut adalah $y = -\frac{1}{2}x + 2$